Тогава уравненията (9.51) за $\mu = 0$ и $\mu = 1, 2, 3$ придобиват вида (замествайки p^μ съгласно (9.42) и собственото време $d\tau$ съгласно (9.16))

$$\mu = 0: \qquad \frac{dE}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}, \tag{9.52}$$

$$\mu = 1, 2, 3: \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{9.53}$$

Уравненията (9.52) и (9.53) съвпадат по форма със съответните нерелативистични уравнения. Уравнението (9.52) изразява закона за изменение на енергията следствие на работата на силата $\vec{F}$, а уравнението (9.53) дава изменението на импулса под действие на $\vec{F}$. Тук обаче E, $\vec{p}$ и $\vec{F}$ се отнасят *за релативистична частица* (величините E и $\vec{p}$ са дефинирани в (9.42) и (9.45)): само при малки скорости на частицата, т.е. при $v \ll c$, когато можем да пренебрегнем v/c (нерелативистично приближение) ще имаме $\vec{p} \simeq m\vec{v}$, $E \simeq mc^2 + mv^2/2$ и $\vec{F} \simeq m\dot{\vec{v}}$. Уравненията (9.52), (9.53) се използват при описание на процеса на ускоряване на заредени частици с помощта на електрично и магнитно поле (вж. напр. [4], където уравненията (9.52) и (9.53) се решават за случая на постоянно електрично и магнитно поле).

§34. Тахиони.*

1. Принцип на причинността. В пар. 31 показахме, че преобразуванията на Лоренц (9.13) се съгласуват с постоянството на пределната скорост c във всички инерциални отправни системи и с принципа за причинност. Преобразуванията (9.13) имат смисъл само при $V < c$ (където V е скоростта на отправната система $\mathcal{K}'$ спрямо $\mathcal{K}$), тъй като при $V = c$ знаменателите стават равни на нула, а при $V > c$ те са имагинерни. Принципът за причинност изисква скоростта на сигнала да е по-малка от c. Следователно, ако движещата се частица може да се разглежда като сигнал, то нейната скорост v не може да е по-голяма c. Анализът на понятието за сигнал, както и на процеса изпращане и приемане на сигнал, показва, че принципът за причинност има термодинамичен характер и може да се свърже с второто начало на термодинамиката (нарастването на ентропията) (резултат на Я.П. Терлецкий, Доклады АН СССР, том 133, с. 329, 1960 г.; вж. също [22]). В такъв случай нарушението на причинността може да се допуска на микроскопично ниво, а също и на макро-ниво, но само като случайна флуктуация.

След това обобщено разбиране на принципа за причинност (след 1960) се появява значително количество статии и книги, посветени на възможността за съществуване на частици, движещи се по-бързо от светлината във вакуум, и на тяхната механика. По-късно за такива частици се утвърди названието *тахиони* (tachyons). Частиците, движещи се с досветлинни (подсветлинни) скорости се наричат *брадиони*, а тези със скорост равна на c – *луксони*. Интересът към тахионите се засили през последните години, във връзка с трудностите за обяснение на някои експериментални резултати за ядрени процеси, съпровождани с излъчване на неутрино (напр. β–разпад на тритий $^3\mathrm{H} \longrightarrow {}^3\mathrm{He} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$) – обяснението би било възможно, ако се приеме, че неутриното е тахион с пространствено-подобен 4-мерен импулс (вж. напр. статията J. Ciborowski, J. Rembielinski, European Phys. Journal C, v. 8, p. 157, 1999 и литературата в нея). Докладват се и резултати за електромагнитни импулси с групова скорост, превишаваща c (вж. напр. G. Kurizki et al, Opt. Spectrosc., v. 87, p. 505, 1999).

2. Функция на Лагранж, енергия и импулс на тахиона. Тахионите могат да бъдат теоретично описани като релативистични частици с маса m и функция на Лагранж (ФЛ) от вида

$$L = \mu c^2 \bar{\gamma}(v), \quad \bar{\gamma}(v) = \sqrt{v^2/c^2 - 1}, \tag{9.54}$$

където μ е положителна константа с размерност на маса (така че L да е с размерност на енергия), а v – скоростта на тахиона, $v \geq c$. С тази ФЛ действието $S = \int L dt$ е релативистичен инвариант (скалар), понеже Ldt е инвариант. Наистина, да вземем същия израз в $\mathcal{K}'$: $L'dt' = \mu c^2 \bar{\gamma}(v')dt'$. За простота разглеждаме движение на частицата по оста OX и специалните преобразувания на Лоренц (9.13). От (9.13) получаваме преобразуването на интервала dt и на скоростта на частицата във вида

$$dt' = \frac{1 - vV/c^2}{\gamma(V)} dt, \qquad v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}, \tag{9.55}$$

където, както и преди, $\gamma(V) = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. Заместването на dt' и v' от (9.55) в израза $\bar{\gamma}(v')dt'$ дава $\bar{\gamma}(v')dt' = \bar{\gamma}(v)dt$, т.е. $L'dt' = Ldt$, което и искахме да докажем.

Оттук и (9.54) следва, че дефинираните чрез ФЛ L импулс и енергия

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\mu \vec{v}}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad E = \vec{p}\vec{v} - L = \frac{\mu c^2}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \tag{9.56}$$

образуват, както и в брадионния случай, четиримерен вектор $\underline{p}$ – вектор на 4-мерния *импулс на тахиона*: $\underline{p} = (p^0, \vec{p})$, $p^0 = E/c$. Този вектор обаче, за разлика от вектора на импулса на брадионите, *не е време-подобен* – той е *пространствено-подобен*, което се дължи на неравенството $v \geq c$: от (9.56) имаме

$$\underline{p}^2 := (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = -\mu^2 c^2. \tag{9.57}$$

В релативистичната механика масата на покой m на всяка частица се дефинира чрез квадрата на четиримерния вектор на импулса ѝ: $\underline{p}^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$, т.е. $m^2 := \underline{p}^2/c^2$. Оттук и от (9.57) получаваме отрицателна стойност за квадрата на "масата на покой на тахиона"

$$m^2 = -\mu^2 < 0,$$

т.е. "масата на покой на тахиона" е *имагинерна*, $m = i\mu$. Но това не е принципиална трудност, тъй като *тахионите никога не са в покой* – скоростта на тахиона v е винаги по-голяма от c. Да отбележим, че v не е ограничено отгоре: при $v \longrightarrow \infty$ енергията на тахиона, съгласно (9.56), клони към нула, а импулсът му $|\vec{p}|$ – към μc. При $v \longrightarrow c$ както енергията, така и импулсът на тахиона, подобно на тези за брадиона, клонят към безкрайност.

3. Принцип на превключването. Нека в системата $\mathcal{K}$ в момент t_1 и в точка с координата x_1 се излъчва (емитира) тахион със скорост v, който после в момент $t_2 > t_1$ се поглъща (абсорбира) в точка x_2. Понеже $v > c$, то може да се намери такава скорост V, че в системата $\mathcal{K}'$ поглъщането на тахиона да стане преди излъчването, т.е. да се наруши принципа за причинност за процеса "поглъщане–излъчване" на надсветлинна частица. От формулата (9.55), преписана за крайни интервали от време във вида

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma(V)}(1 - vV/c^2) \tag{9.58}$$

намираме, че горното нарушение става при $c > V > c^2/v$, когато знакът на отношението $\Delta t'/\Delta t$ става отрицателен. Това показва, че тахионите не могат да се използват като физически сигнали. В $\mathcal{K}'$ при $c > V > c^2/v$ абсорберът от $\mathcal{K}$ става емитер, а емитерът – абсорбер. Това превключване от емитер в абсорбер и обратно се издига в принцип за частиците с надсветлинни скорости – *принцип на превключването* [21] (за повече подробности вж. [22] и напр. статията G.D. Maccarrone and E. Recami, *Nuovo Cimento A***57** (1980) 85). Чрез физически сигнали ние всъщност предаваме информация от определено място и време за друго определено място, т.е. ние контролираме процесите на излъчване и поглъщане. Принципът за превключването казва, че за отделните тахиони това е невъзможно.

4. Брадион–тахионна симетрия.* Естествен въпрос възниква как биха изглеждали тахионите в отправни системи $\mathcal{K}^*$ движещи се с надсветлинни скорости $V > c$. Да наречем $\mathcal{K}^*$ тахионни, или *надсветлинни отправни системи.* Веднага ще подчертаем, че *$\mathcal{K}^*$ са хипотетични* – не можем да ги свържем с отправни тела, тъй като такива с надсветлинни скорости не са известни. Но даже и да допуснем съществуването на надсветлинни отправни системи, остават два основни проблема: а) какъв е прехода от подсветлинните (нашите) $\mathcal{K}$ към надсветлинните $\mathcal{K}^*$, б) какви са преходите от една $\mathcal{K}^*$, към друга $\mathcal{K}^{*'}$?

Оказва се, че първият проблем има такова теоретично решение, което води до забележителна симетрия между брадиони и тахиони в $\mathcal{K}$ и тахиони и брадиони в $\mathcal{K}^*$. Наистина, *да приемем*, че преходът $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^*$ се описва със следното преобразуване на координатите и времето (тук $V > c$),

$$\begin{aligned} ct^* &= \tfrac{1}{\bar{\gamma}(V)}(ct - Vx/c), \\ x^* &= \tfrac{1}{\bar{\gamma}(V)}(-Vt + x), \quad V > c, \end{aligned} \tag{9.59}$$

или матрично,

$$\underline{x}^* = \Lambda^*(V)\underline{x}, \quad \Lambda^* = \begin{pmatrix} 1/\bar{\gamma}(V) & -V/c\bar{\gamma}(V) \\ -V/c\bar{\gamma}(V) & 1/\bar{\gamma}(V) \end{pmatrix}.$$

Това преобразуване се получава от специалното лоренцово преобразуване (9.13) със замяната $\gamma(V) \longrightarrow \bar{\gamma}(V)$ и полагането $V > c$. Матриците $\Lambda^*(V)$ имат свойствата $\det\Lambda^* = -1$ и $\Lambda^{*T} g \Lambda^* = -g$. Последното означава, че те не влизат в групата на Лоренц (нещо повече – те не образуват група!), но превръщат време-подобните 4-мерни вектори в пространствено-подобни и обратно. В частност, пространствено-подобният 4-мерен импулс на тахиона в $\mathcal{K}$ при преход в $\mathcal{K}^*$ става време-подобен.

Ще покажем, че и скоростта $v > c$ на тахиона в $\mathcal{K}$ за наблюдателя в $\mathcal{K}^*$ става по-малка от c. Наистина, нека x в (9.59) е координата на движеща се частица със скорост $v = dx/dt$. Вземайки диференциал от левите и десните части в (9.59), получаваме от първото уравнение

$$dt^* = \frac{1}{\bar{\gamma}(V)}(1 - vV/c^2)dt, \tag{9.60}$$

след което от второто намираме за скоростта на частицата в $\mathcal{K}^*$ израза

$$v^* := \frac{dx^*}{dt^*} = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}. \tag{9.61}$$

Анализът на тази формула показва, че предвид $V > c$, ако $v \geq c$ (тахион или луксон в $\mathcal{K}$), то $v^* \leq c$ (брадион или луксон в $\mathcal{K}^*$) и обратно – ако $v \leq c$ (брадион или луксон в $\mathcal{K}$), то $v^* \geq c$ (тахион или луксон в $\mathcal{K}^*$). Тази симетрия прилича на (но не е еднаква с) огледалната – колкото скоростта v на брадиона в $\mathcal{K}$ е по-близка до (или по-далече от) c отдолу, толкова скоростта v^* на огледалния му тахионен образ в $\mathcal{K}^*$ е по-близка до (или по-далече от) c отгоре. И така, *при прехода (9.59), тахионите и брадионите сменят местата си, а луксоните остават луксони.* Горната картина не противоречи на предположението, преходите от една надсветлинна отправна система $\mathcal{K}^*$ в друга $\mathcal{K}^{*\,\prime}$ да се осъществяват с обикновените лоренцови преобразувания (9.13), което значи, че за наблюдателите в $\mathcal{K}^*$ (ako $\mathcal{K}^*$ съществуват) светът на досветлинните скорости ще изглежда като този за наблюдателите в $\mathcal{K}$ (като нашия свят). [Проанализирайте сами как ще действат две последователни трансформации $\Lambda^*(V_2)\Lambda^*(V_1)$].

Да отбележим още едно свойство на брадион-тахионните преобразувания (9.59): От (9.60) се вижда, че при $v = V$ имаме $dt^* = -\bar{\gamma}dt$, т.е. времевият интервал dt^* (собственото време на тахиона) има противоположен спрямо dt знак. Това значи инверсия на времето – времето в $\mathcal{K}^*$ тече в противоположна посока (спрямо тази в $\mathcal{K}$). Същото важи и за пространсвените интервали (дължини) dx^* и dx – при $v = V$ имаме $dx^* = -\bar{\gamma}dx$, което значи инверсия и на пространствените координати. Още веднъж напомняме, че преобразуванието (9.59) е *само една теоретична възможност*, установяваща огледално-подобна симетрия между тахиони и брадиони: в това "огледало" тахионът изглежда като брадион, а брадионът – като тахион. При $V \longrightarrow \infty$ преобразуванието (9.59) се свежда до смяна на местата и знака на времевата и пространствената оси: $ct \longrightarrow -x^*$, $x \longrightarrow -ct^*$.

Исторически бележки.* Специалната теория на относителността (СТО), чиито основни положения и по-важни следствия разгледахме в тази глава, е създадена с усилията на много учени, от които ще отбележим (в исторически ред) Х. Лоренц, А. Поанкаре, А. Айнщайн и Х. Минковски. Решаващ тласък за изследванията в посока на оформилата се по-късно СТО е експерименталният резултат на Майкелсон от 1881 г. (A. Michelson) и на Майкелсон и Морли (E. Morley) от 1887 (Amer. J. Sci., **3**, 34, 333) за независимостта на скоростта на светлината от движението на източника. Богата литература по СТО има в сборника [23].

Преобразуванията на Лоренц са публикувани от Лоренц в 1904 г. (Proc. Acad. Sci., Amsterdam, 1904, v. 6, p. 809 (превод в [23])) като преобразувания, които оставят уравненията на Максуел за електромагнитното поле инвариантни. Във вида (9.13) те са записани от Поанкаре (Comptes Rendues, **140**, 1504 (1905)), който ги нарича "преобразувания на Лоренц"и получава от тях закона за събиране на скоростите (9.18) (преобразуванията (9.59): $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^*$, доколкото ми е известно, не са разглеждани). Но Лоренц, за разлика от Айнщайн в 1905 г., не счита преобразуваните величини x', y', z' и t' за физически пространствени координати и време. Айнщайн (Annalen der Physik, **17**, 891 (1905)), получава преобразуванията на Лоренц от следните два постулата (този извод по същество се дава и в повечето учебници [21]):

1. Законите, по които се изменят състоянията на физическите системи, не зависят от това, към коя от две координатни системи, намиращи се в равномерно постъпателно движение една спрямо друга, се отнасят тези изменения.

2. Всеки светлинен лъч се движи спрямо "покоящата"се координатна система с определена скорост c, независимо от това изпуска ли се този лъч от покоящо или от движещо се тяло.

В доклада си на конгрес в Сент Луис в 1904 (публикуван в "Bulletin des Science Mathematiques", **28**, ser. 2, 302 (1904)) А. Поанкаре формулира принципа на относителността така: "Принцип на относителността, съгласно който законите на физическите явления трябва да бъдат еднакви за неподвижния наблюдател и за наблюдателя, извършващ равномерно постъпателно движение". За пределността на скоростта на светлината Поанкаре пише в същата статия условно: "На основата на всички тези резултати, ако те се потвърдят, би възникнала съвършенно нова механика, която би се характеризирала преди всичко с това, че никоя скорост не би могла да превишава скоростта на светлината".

От преобразуванията на Лоренц (9.13) следва, както показахме в основния текст, изменение на интервалите от време и дължините. Но идеи и даже формули за тези изменения са изказвани и преди това от Фицджералд (1891 г.: $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$), Лоренц (1892 г.) и Поанкаре (1902 г.: "Абсолютно пространство и абсолютно време не съществуват"). Псевдоевклидовата структура на пространството на събитията (релативистичният интервал, термините собствено време, световна точка и световна линия (world point, world line = мировая точка, мировая линия)) е въведена от Х. Минковски в публикации от 1907/1908 г. (вж. [23]). Функцията на Лагранж за релативистична частица (9.37) е въведена от Планк (M. Planck, Verhandl. Deutsch. Phys. Ges., b. 4, s. 136, 1906 (превод в [23])).

Интересно е да се отбележи (отбелязано е още в 1908 г. от Х. Минковски [23]), че преобразувания, съвпадащи с тези на Лоренц (9.13) са получени порано от В. Фогт (W. Foigt, Gött. Nachr., b. 5, s. 41, 1887) в статия, посветена на ефекта на Доплер. Известната като формула на Айнщайн връзка между масата и енергията $E = mc^2$ също има интересна предистория, която е описана напр. в статията на У. Фаднър в сп. "Светът на физиката", **24**, кн. 3, 218 (2001) [W.L. Fadner, American Journal of Physics, **56**, 114 (1988)].

Резюме

1. Опитите на Майкелсон и Морли в края на 19 век показаха, че скоростта на светлината c е еднаква в неподвижни и движещи се с постоянна скорост спрямо източника отправни системи. Този факт е заложен в принципа на относителността на Поанкаре-Айнщайн:
   а) физическите закони са еднакви във всички инерциални отправни системи;
   б) скоростта на светлината е еднаква по-големина във всички инерциални системи.

Използвана литература†

1. 1. В.И. Арнолд. *Математични методи на класическата механика.* "Наука и Изкуство", София, 1980 (второ издание) [В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* "Наука", Москва, 1979 (второе издание); Превод от руски на Иван Димовски)]. [Предназначена като учебник в Механико-математическия факултет на Московския университет. Представлява интерес за научни работници и специалисти.]
2. Б. Шутц, *Геометрические методы математической физики*, "Наука", Москва, 1984. [Bernard F. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982]. [Специализиран курс по диференциално-геометрични методи, Университетския колеж в Кардиф.]
3. А. Лихнерович. *Тензорно смятане*, "Наука и Изкуство", София, 1969 [A. Lichnerowicz. *Eléments de Calcule tensoriel*, Librairie Armand Colin, Paris, 1955; Превод от френски на И. Димовски и И. Чобанов] [Предназначена за студенти от Математическия факултет на Софийския университет, но представлява интерес и за по-широк кръг читатели.]
4. Д.А. Трифонов. *Класическа електродинамика.* Издателство на ЮЗУ, Благоевград, 1995. [Учебник по електродинамика за университетски физически специалности "Физика" и "Физика и математика".]
5. И.В. Савельев. *Основы теоретической физики. том 1.* "Наука", Москва, 1991. [Учебник по механика и електродинамика за студенти от нетеоретични университетски и технически специалности.]
6. Х.Я. Христов. *Математични методи на физиката*, "Наука и Изкуство", София, 1967. [Учебник за университетски физически специалности.]
7. Иван Златев, Ангел Николов. *Теоретична механика.* "Наука и Изкуство", София, 1985. [Учебник за университетски физически специалности.]

†Някои източници, цитирани еднократно в текста, не са изнесени в този списък.

8. М.А. Айзерман. *Классическая механика.* "Наука", Москва, 1974. [Курс лекции, четен на студенти от Московски физико-технически институт.]

9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика.* "Наука", Москва, 1973 (трето издание), 1988 (четвърто издание). [Учебник по механика за университетски физически специалности. В четвъртото издание има поправки. В частност дадена е малко по-различна дефиниция (от тази в третото) на каноничните преобразувания, която се свежда до тази в [1]].

10. Дж.Л. Синг. *Классическая динамика.* "Физматгиз", Москва, 1963 [J.L. Synge. *Classical dynamics.* "Springer-Verlag", Berlin, 1960]. [Монографична kнига, но може да служи и като допълнителен учебник.]

11. Г. Голдстейн. *Классическая механика.* "Наука", Москва, 1975 [H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Press, Camridge, 1950]. [Курс лекции по класическа механика, Харвардски университет. Има ново издание (Wesley, 1992).]

12. А. Писарев, Ц. Парасков, С. Бъчваров. *Курс по теоретична механика.* ДИ "Техника", София, 1988. [Учебник по механика за висши технически училища (технически университети).]

13. В.П. Ермаков, Университетские известия, серия III, т. 20, No. 9, стр. 1-25 (Киев, 1880). [Статия в научно списание.]

14. I.A. Malkin, V.I. Man'ko, and D.A. Trifonov, Physical Review D **2**, 1371-85 (1970). [Статия в научно списание.]

15. G. Maneff, Zeitschrift für Physik, **31**, 786-802 (1925); Comptes Rendus (Paris), **190**, 963-965 (1930); (За обобщения вж. напр. S. Craig et al, J. Math. Phys. **40**, 1359-75 (1999)). [Статии в научни списания.]

16. W. Dittrih, M. Reuter. *Classical and quantum dynamics.* "Springer-Verlag", Berlin, 1994). [Монографична книга, но може да служи като допълнително учебно пособие.]

17. А. Картан. *Дифференциальное исчисление. Диференциальные формы.* "Мир", Москва, 1971 [H. Cartan. *Calcul différentiel. Formes differentielles*, Hermann, Paris, 1967]. [Написана въз основа на лекции по курса "Математика II", Парижки университет.]

18. W. Thiring. *Classical dynamical sistems*, Springer-Verlag, 1978. [Книгата има монографичен характер.]
19. J.E. Marsden, T.S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry.* Springer-Verlag, 1994 (Texts in applied mathematics). [Специализиран курс въз основа на лекции в Калифорнийски университет, САЩ.]
20. H. Rosu. *Classical mechanics*, e-print physics/9909035 [Кратък курс по класическа механика, Университет в Леон, Мексико.]
21. Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. *Электродинамика.* "Высшая школа", Москва, 1990. [Учебник за университетски физически специалности.]
22. Я.П. Терлецкий. *Парадоксы теории относительности.* "Наука", Москва, 1966. [Монографична книга, но е предназначена за по-широк кръг читатели (научни работници, аспиранти, студенти).]
23. *Принцип относительности* (сборник научни статии), "Атомиздат", Москва, 1973.

Използвани означения (устойчиви в цялата книга)

$\mathbb{A}_n$ – афинно точково пространство с размерност n

$\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots$ – тримерни вектори (a_i, b_i – тяхните компоненти)

$\underline{a}$, $\underline{b}, \ldots$ – 4-мерни вектори

a^μ, b^μ – контра-вариантни компоненти на $\underline{a}$, $\underline{b}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$

a_μ, b_μ – ко-вариантни компоненти на $\underline{a}$, $\underline{b}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$

c – скорост на светлината (гл. 9); произволна константа (гл. 3)

δ_{ij} – символ на Кронекер

E – пълна (или обобщена) енергия на механична система (МС)

ϵ_{ijk} – компоненти на антисиметричния тензор на Леви-Чивита

$\vec{f}$, $\vec{F}$ – вектори (тримерни) на сила

$\mathcal{F}^\mu$ – компоненти на 4-мерната сила на Минковски

$\mathbb{E}_n$ – n-мерно евклидово пространство

g_{ij}, $g_{\mu\nu}$ – компоненти на метричен тензор